Binomialfordeling og binomialtest

Når man gentager en række helt ens basiseksperimenter, der har to udfald (succes og fiasko), fremkommer en fordeling, som kaldes en binomialfordeling. Kast med en terning er et eksempel på et basiseksperiment, hvor udfaldet "seks" kan være succes og udfaldet "ikke seks" er så fiasko.

Basiseksperimentet udføres *n* gange og de enkelte gentagelser skal være uafhængige. Sandsynligheden for succes i basiseksperimentet kaldes *p*, og sandsynligheden for fiasko er så *(1-p)*. Hvis X angiver antallet af succeser i forsøgsrækken, kan vi finde frem til sandsynligheden for præcis *r* succeser $P(X = r)$ på følgende måde:

Sandsynlighed for succes *r* gange: p^r

Sandsynlighed for fiasko de resterende *n-r* gange: $(1-[\![p)]\!]^{n-r}$

De r succeser udtages blandt de n forsøg på $K_{n,r}$ måder (se Kombinatorik).

Vi får dermed ved at gange sammen:

$$P(X = r) = K_{n,r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Denne sandsynlighedsfordeling kaldes en **binomialfordeling** og betegnes *b(n,p)*.

Binomialfordelingen har middelværdien $n \cdot p$. Denne betegnes E(X) eller μ

Hvis man kaster en ærlig terning 5 gange, har man et eksperiment, der kan beskrives ved binomialfordeling. Hvis X tæller antal seksere (succes er en sekser) er $n = 5$ og $p = \frac{1}{6}$.
Man kan nu finde den tilhørende binomialfordeling[1], eksempelvis er sandsynligheden for, at der kommer 2 seksere i de fem kast:

$$P(X = 2) = K_{5,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 0{,}1608 = 16{,}08\,\%$$

Middelværdien er: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

For at finde det antal seksere der hyppigst kommer, undersøges sandsynligheden for de to X-værdier der ligger omkring middelværdien – her X=0 og X=1:

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}4019 = 40{,}19\,\%$$

$$P(X = 1) = K_{5,1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 40{,}19\%$$

Da middelværdien er tæt på X=1, kunne man tro, at der oftest kommer én sekser ved 5 kast med en terning, men det ses, at man får 0 seksere ligeså ofte som 1 sekser.

Binomialtest
Man kan ved hjælp af en **binomialtest** afgøre om gentagne tab i tilfældige spil, kan skyldes en uheldig dag eller om der har været tale om uærligt spil.

Vi vil se på en spiller, der ud af 1000 spil på rødt vinder 453 gange på en roulette. Antallet af gange rødt kommer ud kaldes X, og X er binomialfordelt $b\left(\frac{1000{,}18}{37}\right)$.

Vi forventer, at spilleren vinder ca. $1000 \cdot \frac{18}{37} = 486$ gange. Hvis han vinder 480 gange, er der intet der tyder på falsk spil, men hvis han vinder 100 gange (eller 900 gange) kan man være skeptisk med hensyn til ærligheden i spillet.

Vi deler værdierne for X op i to mængder: Den kritiske mængde, som består af de tal der gør os skeptiske, og acceptmængden, der består af resten.
Da vi her kun føler os snydt ved lave X-værdier, er det kun små X-værdier, der er i den kritiske mængde.

Vi vil nu teste om sandsynligheden for rødt er $\frac{18}{37}$, selvom rødt kun kom ud 453 gange. Hvis 453 ligger i den kritiske mængde, vil vi have god grund til at tro at der er spillet falsk.

Der er en risiko for at begå fejl, dvs. at man anklager for uærligt spil, selvom det var ærligt. Denne risiko fastlægger man med valget af et såkaldt **signifikansniveau**, f.eks. 5 %.

Da $P(X \leq 459) = 4{,}4\ \%$, er den kritiske mængde tallene fra 0 op til 459, idet $P(X \leq 460) > 5\ \%$.
453 tilhører den kritiske mængde, så vi formoder at spillet var falsk (med en risiko for fejl på 4,4 %).

Selv med et signifikansniveau på 2 % tilhører 453 den kritiske mængde, fordi $P(X \leq 453) = 1{,}8\ \%$